# IV раздел

## Евклидови пространства. Определение за евклидово пространство, ортогонализация по метода на Грам-Шмидт

**Деф**
Ако $V \in ЛП$ над $\mathbb{R}$, то изображението $(u,v): V \times V \to \mathbb{R}$ $(u,v) \in \mathbb{R}$ е скаларно произведение в $V$ ако:

аксиома 1) $(uv) = (vu)$ за $\forall u,v \in V$

аксиома 2) $(\lambda u_1, v) = \lambda(u_1, v)$ за $u_1 v \in V$, $\lambda \in F$

аксиома 3) $(u_1 + u_2)v = (u_1 v) + (u_2 v)$ за $\forall u_1 u_2 v \in V$

аксиома 4) $(u,u) \geq 0$ за $\forall u \in V$ с равенство $(u,u) = 0$ точно когато $u = \vec{0}_V$

**Деф**
Линейните пространства $V$ над $\mathbb{R}$, със скаларно произведение се. наричат евклидови пространства

Следствия от аксиомите за скаларно произведение

1) $(u, v_1 + v_2) = (u,v_1) + (u,v_2)$ за $\forall u, v_1, v_2 \in V$

Док-во
$(u, v_1 + v_2) \overset{A1}{=} (v_1 + v_2, u) \overset{A2}{=} (v_1,u) + (v_2,u) \overset{A1}{=} (u,v_1) + (u,v_2)$

2) $(u, \lambda v) = \lambda(u,v)$ за $\forall u,v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Док-во
$(u, \lambda v) \overset{A1}{=} (\lambda v, u) \overset{A3}{=} \lambda(v,u) \overset{A1}{=} \lambda(u,v)$

3) $(\vec{0}_V, u) = (u, \vec{0}_V) = 0$ за $\forall u \in V$

Док-во
$\vec{0}_V = 0_V$ за $\forall v \in V \Rightarrow$ за $0 \in \mathbb{R}$
$(\vec{0}_V, u) = (0.v, u) \overset{A3}{=} 0(v,u) = 0$ и $(u, \vec{0}_V) = (u, 0.v) \overset{A2}{=} 0(u,v) = 0$

4)
$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i, \sum_{I=1}^{n} \varsigma_I v_I\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{I=1}^{n} x_i \varsigma_I (u_i v_I) \text{ за } u_1 - u_m, v_1 - v_n \in V$$
$$x_i \varsigma_I \in \mathbb{R}$$

Док-во
$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i u_i, \sum_{I=1}^{n} \varsigma_I v_I\right) \overset{A2}{=} \sum_{i=1}^{m} \left(x_i u_i, \sum_{I=1}^{n} \varsigma_I v_I\right) \overset{Сл1}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{I=1}^{n} \left(x_i u_i, \varsigma_I v_I\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{I=1}^{n} x_i \varsigma_I (u_i, v_I)$$

Деф
Ако $V$ е евклидово пространство, $v \in V$, определяме дължината на $v$ като неотрицателния корен квадратен $\|v\| = \sqrt{(v,v)} \geq 0 \in \mathbb{R}$, За $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ и $\forall v \in V$ имаме $\|\lambda v\| = \sqrt{(\lambda v, \lambda v)} \geq 0 \overset{A3}{=} \sqrt{\lambda^2 (v,v)} \geq 0 = |\lambda| \sqrt{(v,v)} \geq 0 = |\lambda| \|v\|$
В частност, ако $v \in V \setminus \{\vec{0}_V\}$ то $\frac{v}{\|v\|} \in V$ е единичен вектор колинеарен с $v$

Деф
Векторите $b_1$ - $b_m$ от евклидово пространство $V$ са ортогонални, ако $(b_i, b_j) \geq 0$ за $\forall 1 \leq i, j \leq m$. Векторите $e_1$ - $e_m \in V$ са ортонормирани, ако $e_1$ - $e_m$ са ортогонални и единични

Лема
Ако векторите $b_1$ - $b_m$ от евклидово пространство $V$ са ненулеви и ортогонални то $b_1$ - $b_m$ са ЛНЗ-ми

Док-во
Ако $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m = \vec{0}_V$, то скалярното умножение с $b_i$ дава следното нещо $(\vec{0}_V, b_i) \overset{A3}{=} 0$
$(\lambda_1 b_1 + \dots \lambda_m b_m, b_i) \overset{A4}{=} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (b_j, b_i) = \lambda_i (b_i, b_i)$

$b_i$ - $b_m$ са ортогонални, т.е. $(b_j, b_i) = 0$, за $\forall j \neq i$.
Понеже $(b_i, b_i) > 0$ за $b_i \neq \vec{0}_V$ оттук следва $\lambda_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq m$ следователно $b_1$ - $b_m$ са ЛНЗ-ми

Лема
Нека $e_1$ - $e_n$ е базис на евклидово пространство $V$, $x, y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ са координатните стълбове на $u, v \in V$ спрямо базиса $e = e_1$ - $e_n$. В такъв случай $e_1$ - $e_n$ е ортонормиран базис на $V \Leftrightarrow$ $(u,v) = x^t y$ за $\forall u = ex$, $v = ey \in V$

Док-во $\Rightarrow$
Ако $e_1$ - $e_n$ е ортонормиран базис на $V$ и $u = ex = \sum_{i}^{n} x_i e_i$
$v = ey = \sum_{j=1}^{m} y_j e_j$ то скалярното произведение $(u,v) =$
$\left( \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{m} y_j e_j \right) \overset{A4}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j (e_i e_j) \overset{e_1 - e_n \text{ ортон базис}}{=}$ т.е. $= (e_i e_j) = 0$ за
$i \neq j$ и $(e_i e_j) = 1$ за $i = j \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_i y_j = (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = x^t y$

Док-во ←

Нека $(e_x e_y) = x^t y$ за базиса $e = (e_1 \dots e_n)$ на $V$ и $\forall x, y \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$. За $i \neq j \Rightarrow e_i = (e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$e_j = (e_1 \dots e_n)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(e_i e_j) = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_I = 0 \text{ за } i \neq j$$

$$(e_i e_j) = (0 \dots \overset{i}{1} \dots 0)\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_I = 1 \text{ за } i = j$$

следователно $e_1 \dots e_n$ е ортономиран базис